第 2 节 非合一结构的图象性质综合题（★★★☆）

内容提要

对于不能化成 $y = A\sin(\omega x+\varphi)+B$ 这种形式的三角函数图象性质的综合题，一般优先尝试看能否画图分析；对于不易画图的，若有绝对值，就分类讨论去绝对值，若有根号，则凑平方去根号；否则就直接用代数的方法验证选项（如单调性可求导，对称性、周期性可验证解析式是否满足对应的恒等式等）.

典型例题

类型Ⅰ：绝对值型

【例 1】（多选）已知函数 $f(x)=|\sin x|\cos x$，则下列说法正确的是（　　）

（A） $f(x)$ 的最小正周期是 4π

（B） $f(x)$ 的值域是 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

（C） $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 上单调递减

（D） $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称

解析：A 项，$\sin x$ 和 $\cos x$ 的周期都是 2π，所以猜想 2π 是 $f(x)$ 的周期，可用周期的定义来验证，

$f(x+2\pi)=|\sin(x+2\pi)|\cos(x+2\pi)=|\sin x|\cos x=f(x)\Rightarrow 2\pi$ 是 $f(x)$ 的周期，故 A 项错误；

B 项，已知了 2π 是周期，不妨在 $[0,2\pi)$ 这个周期内来求值域，可讨论 $\sin x$ 的正负，去掉绝对值，

当 $0\le x\le\pi$ 时，$\sin x\ge 0$，$f(x)=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$；

当 $\pi<x<2\pi$ 时，$\sin x<0$，$f(x)=-\sin x\cos x=-\frac{1}{2}\sin 2x$；

结合 $f(x)$ 周期为 2π 可得 $f(x)$ 的大致图象如图，由图可知 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，故 B 项正确；

C 项，由图可知 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ 上↘，故 C 项正确；

D 项，由图可知 $f(x)$ 关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，故 D 项正确.

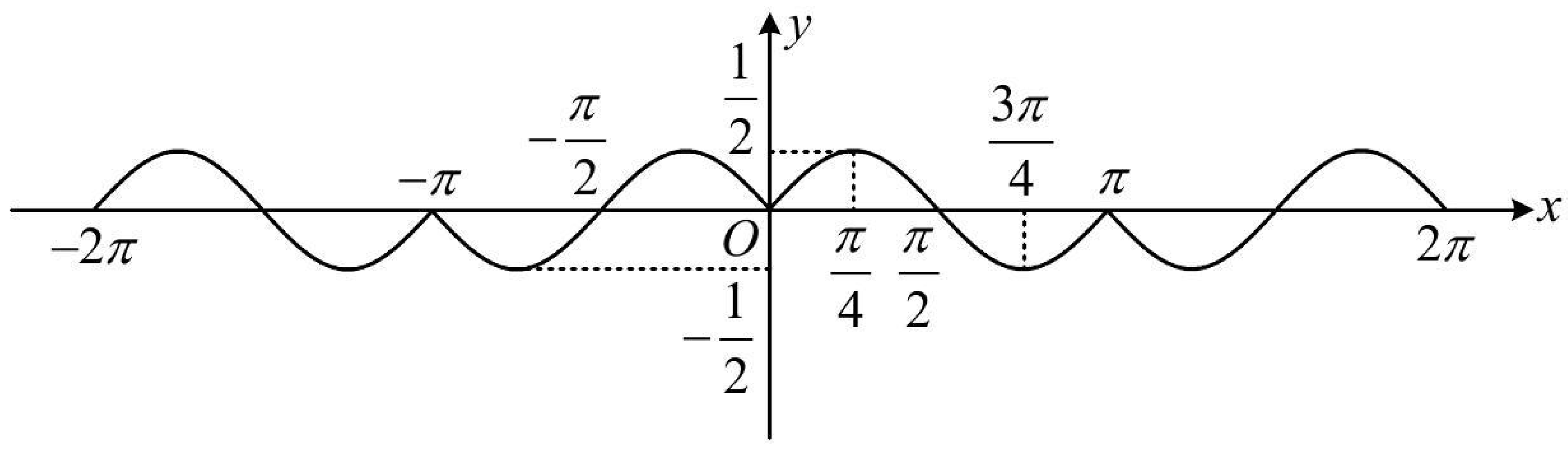
若从图象没看出来关于 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，还可以用对称的结论判断，

$f(x)$ 是否关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，取决于 $f(x+\pi)+f(-x)=0$ 是否成立，

因为 $f(x+\pi)+f(-x)=|\sin(x+\pi)|\cos(x+\pi)+|\sin(-x)|\cos(-x)=|-\sin x|(-\cos x)+|\sin x|\cos x=0$，

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称.

答案：BCD



【反思】遇到让判断 $f(x)$ 的图象是否关于某点或某直线对称的问题，在第三章的第一模块“抽象函数问题”有详细归纳，如有疑惑可以查阅.

【变式】（多选）关于函数 $f(x)=\tan(|x|+\frac{\pi}{4})$，则（　　）

（A） $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

（B） $f(x)$ 的最小正周期为 π

（C） $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上单调递增

（D） $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{4},0)$ 对称

解析： $f(-x)=\tan(|-x|+\frac{\pi}{4})=\tan(|x|+\frac{\pi}{4})=f(x)\Rightarrow f(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，故 A 项正确；

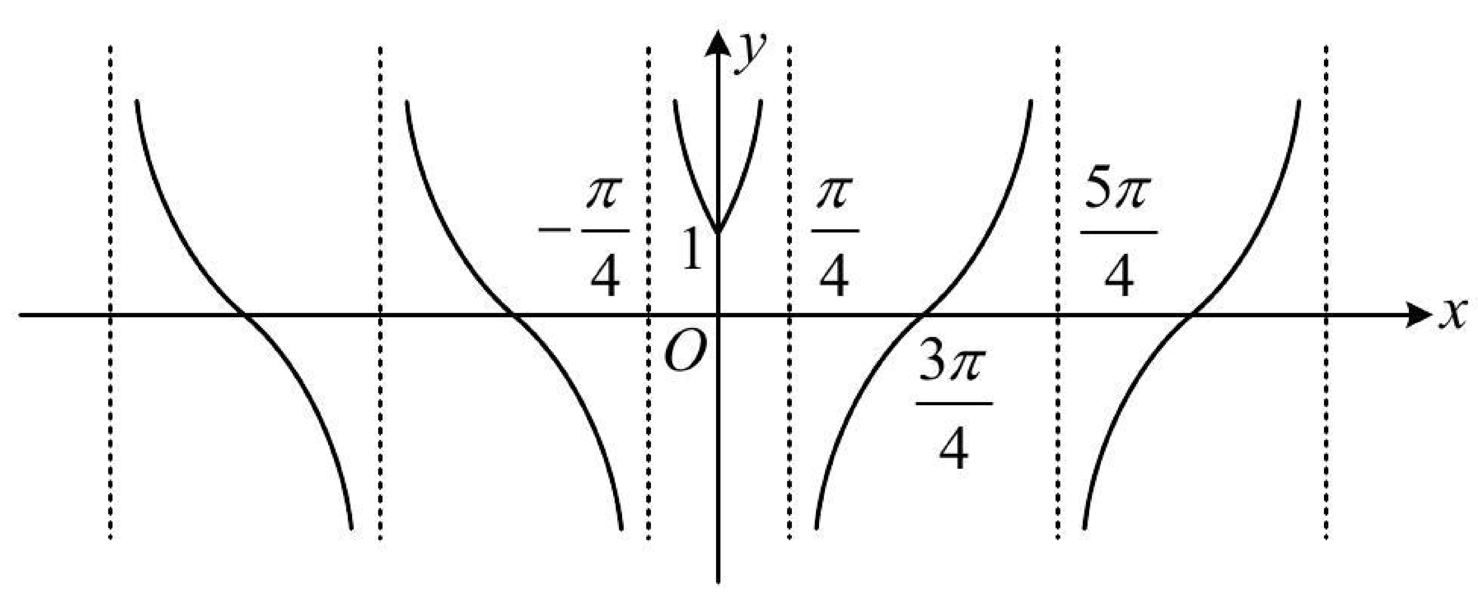
剩下的三个选项都可以通过画出 $f(x)$ 的图象来判断，因为 $f(x)$ 是偶函数，所以先画 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的图象，再对称翻折到 y 轴左侧即可，

当 $x\geq 0$ 时， $f(x)=\tan(x+\frac{\pi}{4})$，它就是把 $y=\tan x$ 左移了 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，（只取 $[0,+\infty)$ 的部分）

所以 $f(x)$ 的图象如图，由图可知， $f(x)$ 不是周期函数，其图象也没有对称中心，所以选项 B、D 错误；

而 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 上↗，故 C 项正确.

答案：AC



【总结】若绝对值套在函数外面，则可按函数值的正负讨论，如有周期，则可在一个周期内去绝对值研究；若绝对值加在自变量 x 上，则按 x 的正负分类讨论. 另外，若能画图，一般画图分析更直观.

类型Ⅱ：根号型

【例 2】（多选）已知函数 $f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}$，则下列说法正确的有（　　）

（A）函数 $f(x)$ 是偶函数

（B）函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π

（C）函数 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},2]$

（D）函数 $f(x)$ 的图象的相邻两条对称轴间的距离为 π

解析：A 项，$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sqrt{1+\cos(-x)}+\sqrt{1-\cos(-x)}=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，故 A 项正确；

B 项，2π 显然是 $f(x)$ 的周期，但是不是最小正周期呢？常常会尝试它的一半，看看 π 是否为周期，

$f(x+\pi)=\sqrt{1+\cos(x+\pi)}+\sqrt{1-\cos(x+\pi)}=\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{1+\cos x}=f(x)\Rightarrow \pi$ 是 $f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(x)$ 的最小正周期不是 2π，故 B 项错误；

C 项，要求值域，先化简 $f(x)$ 的解析式，看到 $1+\cos x$ 和 $1-\cos x$，自然想到升次公式，

$f(x)=\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}+\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}\left(\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|+\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|\right)$，

根号已经去掉了，但还有绝对值，前面我们已经得到了 π 是 $f(x)$ 的一个周期，所以可在 $[0,\pi)$ 这个周期内考虑，先去绝对值，再求值域，

当 $x\in[0,\pi)$ 时，$\dfrac{x}{2}\in[0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\dfrac{x}{2}>0$，$\sin\dfrac{x}{2}\ge 0$，从而 $f(x)=\sqrt{2}(\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2})=2\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})$，

要求此函数的值域，可将 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}$ 换元成 t，借助 $y=2\sin t$ 的图象来分析，

令 $t=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}$，则 $f(x)=2\sin t$，因为 $0\le x<\pi$，所以 $\dfrac{\pi}{4}\le t<\dfrac{3\pi}{4}$，

函数 $y=2\sin t$ 的部分图象如图 1 所示，由图可知 $f(x)$ 的值域为 $[\sqrt{2},2]$，故 C 项正确；

D 项，由 C 项知当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)=2\sin(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4})$，所以 $f(x)$ 的部分图象如图 2，

由图可知 $f(x)$ 的图象相邻两条对称轴间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$，故 D 项错误.

答案：AC

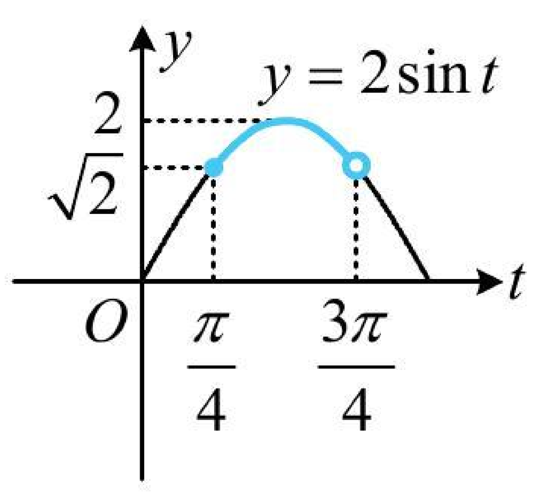


图1

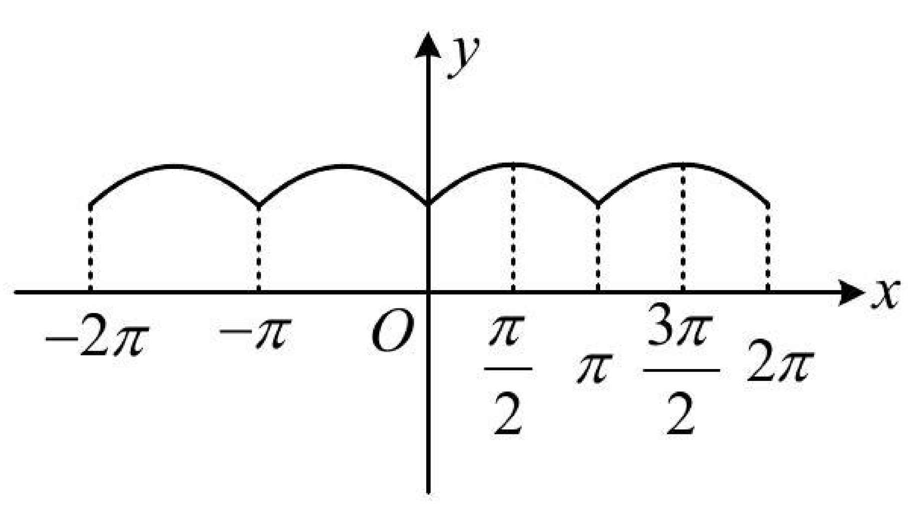


图2

类型III：复合函数型

【例 3】已知函数 $f(x)=\sin(\cos x)+\cos x$，现有如下说法：

①直线 $x=\pi$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴；

②函数 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$ 上单调递增；

③$\exists x\in\mathbf{R}$，$f(x)\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$.

则上述说法中正确的个数为（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

解析：①项，要判断 $x=\pi$ 是否为对称轴，只需看 $f(2\pi-x)=f(x)$ 是否成立，

$f(2\pi-x)=\sin(\cos(2\pi-x))+\cos(2\pi-x)=\sin(\cos x)+\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 关于 $x=\pi$ 对称，故①项正确；

②项，观察解析式发现只要把 $\cos x$ 换元，就可将解析式简化，令 $t=\cos x$，则 $f(x)=\sin t+t$，

函数 $y=f(x)$ 可以看成由外层的 $y=\sin t+t$ 和内层的 $t=\cos x$ 复合而成，可用同增异减准则判断单调性，

先看外层，$y=\sin t+t\Rightarrow y'=\cos t+1\ge 0\Rightarrow y=\sin t+t$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

再看内层，当 $x\in[\pi,2\pi]$时，$t=\cos x$ 也↗，所以 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$上↗，故②项正确；

注：此选项也可直接求导判断，$f'(x)=\cos(\cos x)\cdot(-\sin x)+(-\sin x)=-\sin x[\cos(\cos x)+1]$，

当 $x\in[\pi,2\pi]$时，$\sin x\le 0$，$\cos(\cos x)+1\ge 0$，所以 $f'(x)\ge 0$，故 $f(x)$ 在 $[\pi,2\pi]$上↗；

③项，只要求出函数的最大值，就能判断此选项是否正确，而求最值，常用单调性，结合前两个选项，我们可以得出 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$上↘，在 $[\pi,2\pi]$上↗，所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$上的最大值可求，

$\begin{cases}f(0)=\sin(\cos 0)+\cos 0=\sin 1+1\\ f(2\pi)=\sin(\cos 2\pi)+\cos 2\pi=\sin 1+1\end{cases}\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,2\pi]$上的最大值为 $\sin 1+1$，

注意到 $f(x+2\pi)=\sin(\cos(x+2\pi))+\cos(x+2\pi)=\sin(\cos x)+\cos x=f(x)$，所以 $f(x)$ 周期为 2π，

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值也是 $\sin 1+1$，所以只需比较 $\sin 1+1$ 和 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$的大小，即比较 $\sin 1$ 和 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为 $0<1<\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$上↗，所以 $\sin 1<\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而 $\sin 1+1<\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$，故③项错误.

答案：C

【总结】非合一结构的三角函数性质研究，很多时候需要用到一般化的函数分析方法（如用对称结论分析对称性、求导分析单调性等），只需对应翻译所给性质即可；再次强调，能画图的优先考虑画图分析.

强化训练

1．（2020 • 新课标III卷 • ★★★）关于函数 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 有如下四个命题：

① $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

② $f(x)$ 的图象关于原点对称；

③ $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称；

④ $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是_____.

2．（2022 • 深圳模拟 • ★★★）若函数 $f(x)=|\tan(\omega x-\omega)|(\omega>0)$ 的最小正周期为 4，则下列区间中 $f(x)$ 单调递增的是（　　）

（A）$(-1,\dfrac{1}{3})$　（B）$(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3})$　（C）$(\dfrac{5}{3},3)$　（D）$(3,4)$

3．（2022 • 山西二模 • ★★★）下面关于函数 $f(x)=\sin 2x+2|\sin x|\cos x$ 的结论，其中错误的是（　　）

（A）$f(x)$的值域是$[-2,2]$

（B）$f(x)$是周期函数

（C）$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{2}$对称

（D）当$x\in(\pi,2\pi)$时，$f(x)=0$

4．（2019·新课标Ⅰ卷·★★★）关于函数 $f(x)=\sin|x|+|\sin x|$ 有下述四个结论：

① $f(x)$ 是偶函数；② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 单调递增；③ $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有 4 个零点；④ $f(x)$ 的最大值为 2.

其中所有正确结论的编号是（　　）

（A）①②④　　（B）②④　　（C）①④　　（D）①③

5．（2022·景德镇模拟·★★★★）（多选）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\tan x,\tan x>\sin x\\ \sin x,\tan x\le\sin x\end{cases}$，则（）

（A） $f(x)$ 的最小正周期是 2π

（B） $f(x)$ 的值域是 $(-1,+\infty)$

（C）当且仅当 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x\le k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时， $f(x)\le 0$

（D） $f(x)$ 的单调递增区间是 $[k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2})(k\in\mathbf{Z})$

6．（★★★★）（多选）已知函数 $f(x)=\cos(\sin x)$，则下列关于该函数性质的说法中正确的是（　　）

（A） $f(x)$ 的一个周期为 2π

（B） $f(x)$ 的值域是 $[-1,1]$

（C） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称

（D） $\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上唯一的极值点